

これならわかる地球の歳差運動 付録 『簡明 地球の歳差運動のトルクの算出』

はじめに

日月歳差の角速度 $50.4''$ /年 は理論的に算出することができる。

歳差の角速度は、月と太陽がもたらすトルクを地球の角運動量成分 $L \sin \varepsilon$ (ε は地球の黄道傾斜角) で除すればよい。 $L \sin \varepsilon$ は定数と見なされるので、歳差の角速度とトルクは比例関係にある。従って、トルクの計算さえできれば、課題は解決される。

しかしながら歳差のトルクの算出は、重力ポテンシャル、ルジャンドル多項式、マツカラー公式等の数式が続き、一般の天文ファンには難解である。(文献 1, 2) そこで本稿は、天文と古典力学の基礎知識だけで上記と同じ結論が得られるように解説したものである。

1 歳差運動の基本原則

歳差運動の基本原則については、コマの運動を例とするのがわかりやすい。

コマを高速で回転させて水平面上に少し傾けて置くと、回転軸は一定の角速度で鉛直軸と一定の角度を保ちながら旋回する。この運動を歳差運動という。(文献 3)

今、図 1 のように、コマの回転軸が水平面に接する点を座標原点 o とし、鉛直線の上向きに z 軸をとる。 r はコマの支点 o からコマの重心 G までの位置ベクトルである。そこで質量 m のコマが、その回転軸を z 軸 (鉛直軸) と傾斜角 θ を保ちながら歳差運動しているとする。 L はコマの角運動量ベクトル、 ω はコマの回転の角速度、 Ω は歳差運動の角速度である。

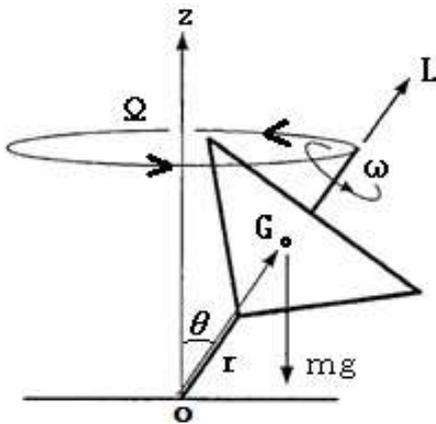


図 1 コマの歳差運動

歳差運動 Ω の向きは、右ネジの法則により r 軸 (コマの回転軸) と z 軸 (重力の方向) がなす平面に直交し、図 1 に示すように紙面の表から裏となる。トルクの大きさ N は、地球の重力加速度を g として $N = mgr \sin \theta = r \times mg = r \times F$ (1 式) である。

$N = r \times F$ は一般に力 F のモーメントと呼ばれているもので、 $dL/dt = N$ (2 式) は回転運動の基本式である。

次に、基本式 $dL/dt=N$ から歳差運動の角速度 Ω を求めて見よう。
 図2は図1の運動を角運動量ベクトル L で表現したものである。

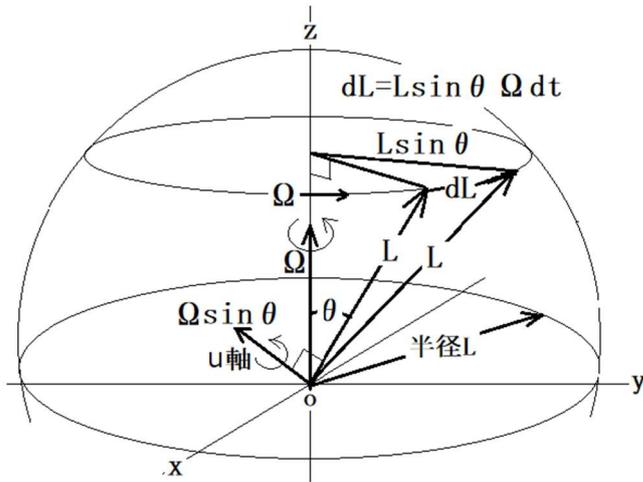


図2 半径 L の球面における角運動量ベクトル L の移動

図2に示すように角運動量ベクトル L は z 軸のまわりを半径 $L \sin \theta$ で円運動することがわかる。歳差運動の角速度を Ω とすると、微小時間 dt のあいだの角運動量 L の変化は $dL = L \sin \theta \Omega dt$ である。また $dL/dt = N$ から $dL = N dt$ である。これらから、 $\Omega = N / L \sin \theta = N / I \omega \sin \theta$ (3式) が導かれる。ここで I は、コマの軸の慣性モーメントである。角運動量 L と傾斜角 θ を定数と見れば、歳差の角速度 Ω はトルク N に比例することになる。そこで以後、歳差運動はトルクを主に検討することとする。

次に、上記の検討内容を地球に適用させる。
 図3は黄道面の天体が地球に及ぼすトルクの説明図である。
 ここでは天体を太陽または月と考えよう。

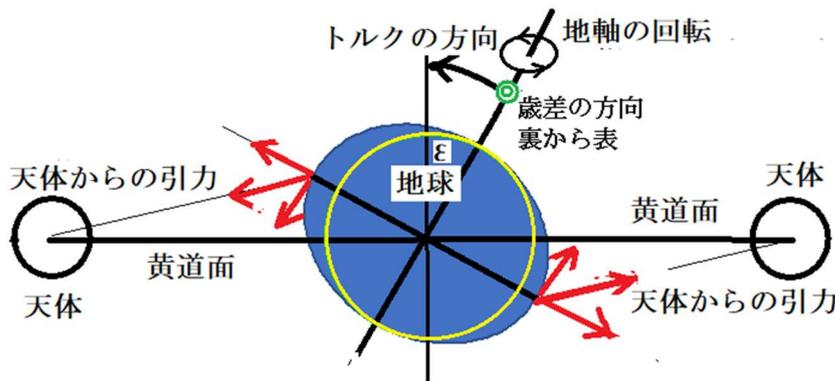


図3 黄道面の天体が地球に及ぼすトルクの説明図

地球の場合、支点のかわりになるのは重心で、コマの傾き θ は黄道傾斜角 ε に相当する。

地球は完全な球でなく、球を上下に少し圧縮したような形をしている。(注1)

図3の地球はそれを横(黄道面)方向から眺めたものを誇張して描いたもので、地球内部の円(黄色の円)は完全な球体を示している。地軸の方向から眺めると、上記の完全な球体の径よりもやや大きな完全な円である。

地球を質点の集合を見た場合、各質点には天体からの引力によるトルクが発生するが、真球の部分は完全な対称性があるために相殺されて0となる。

従って、実質的なトルクは球体からはみ出した部分から生まれることになる。

図3からわかるように、天体からの引力は地球の重心に作用する中心力とそれに直角なトルク成分に分解される。

トルクの方法は天体が軌道上のどの位置にあっても左回転であり、地球の地軸を立てるように作用することがわかる。

これはコマの重力によるトルクと反対方向であり、歳差運動の方向が反対となることがわかる。(図3の紙面の裏から表の方向)

つまり、地球の歳差運動の方向は地球の自転方向の逆となる。

(注1) 地球の形状は赤道半径が極半径よりもわずかに長い回転楕円体である。

これは地球楕円体と呼ばれ、下式で表される。

$$(x^2/a^2) + (y^2/a^2) + (z^2/b^2) = 1$$

a : 赤道半径 6378.137km b : 極半径 6356.752km

ここで、地球楕円体の体積から極半径 6356.752km の真球を除いた剰余体積を求めると、

地球楕円体の体積

$$(4\pi/3) \times a^2b = (4\pi/3) \times (6378.137\text{km})^2 \times 6356.752\text{km} = 1.083207 \times 10^{21} \text{ m}^3$$

真球の体積

$$(4\pi/3) \times b^3 = (4\pi/3) \times (6356.752\text{km})^3 = 1.075956 \times 10^{21} \text{ m}^3$$

剰余体積 = 地球楕円体の体積 - 真球の体積

$$\begin{aligned} & \text{地球楕円体の体積 } 1.083207 \times 10^{21} \text{ m}^3 - \text{真球の体積 } 1.075956 \times 10^{21} \text{ m}^3 \\ & = 7.251507 \times 10^{18} \text{ m}^3 \end{aligned}$$

上記の剰余体積に地球の大陸地殻の密度 2.7g/cm^3 を乗じて剰余体積の質量とすると、 $1.96 \times 10^{22} \text{ kg}$ となる。

地球の質量は、 $5.9722 \times 10^{24} \text{ kg}$ であるから、剰余質量は全質量の約 $1/300$ となる。このような微小な質量が歳差運動の原動力となっていることはある種の驚きである。

2 歳差トルクの計算式の導出

図4において、地球は質点の集合と見なされ、各質点にかかる力 dF は万有引力の法則から下式で表される。式中の R, r, s は位置ベクトルで表示されている。

$$dF = \frac{GMm_i}{|s|^2} \left(\frac{s}{|s|} \right) = \frac{GMm_i}{|s|^3} s \quad (4) \text{式}$$

地球の重心は直交座標 x, y, z 軸の原点 o に置かれている。

r は地球の重心 o から質点までの距離、 s は質点から天体の中心までの距離、 R は地球の重心 o から天体の重心までの距離を表す。

G は重力定数、 M は天体の質量、 m_i は質点の質量である。

α と δ は天体の赤経と赤緯である。

赤道座標の赤道は xy 平面に置かれ、春分点は x 軸の正方向にある。

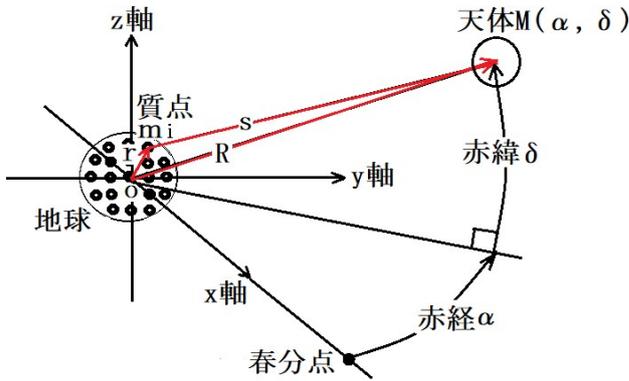


図4 地球の質点にかかる万有引力の説明図

図4より $R=r+s$ のベクトル的關係が成立するから、質点の座標を (x, y, z) とする時の距離 s は下式で表される。

$$s = R - r = \begin{pmatrix} R \cos \delta \cos \alpha \\ R \cos \delta \sin \alpha \\ R \sin \delta \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R \cos \delta \cos \alpha - x \\ R \cos \delta \sin \alpha - y \\ R \sin \delta - z \end{pmatrix}$$

$$|s| = \sqrt{(R \cos \delta \cos \alpha - x)^2 + (R \cos \delta \sin \alpha - y)^2 + (R \sin \delta - z)^2}$$

$$= \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 2R(\cos \delta \cos \alpha x + \cos \delta \sin \alpha y + \sin \delta z) + R^2}$$

r は R に比べて、極めて小さいから $\frac{1}{|s|^3}$ のマクローリン展開が可能である。

$|s| = \sqrt{A}$ と置いて関数 $f(x, y, z) = \frac{1}{|s|^3} = A^{-1.5}$ を作成する。

$A = x^2 + y^2 + z^2 - 2R(\cos \delta \cos \alpha x + \cos \delta \sin \alpha y + \sin \delta z) + R^2$ である。

これを x, y, z で偏微分して、マクローリン展開を行う。

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{\partial A^{-1.5}}{\partial x} = -3A^{-2.5}(x - R \cos \delta \cos \alpha) \quad \frac{\partial f(0,0,0)}{\partial x} = \frac{3}{R^4} \cos \delta \cos \alpha$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial A^{-1.5}}{\partial y} = -3A^{-2.5}(y - R \cos \delta \sin \alpha) \quad \frac{\partial f(0,0,0)}{\partial y} = \frac{3}{R^4} \cos \delta \sin \alpha$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial A^{-1.5}}{\partial z} = -3A^{-2.5}(z - R \sin \delta) \quad \frac{\partial f(0,0,0)}{\partial z} = \frac{3}{R^4} \sin \delta$$

$$f(x, y, z) = f(0,0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0,0)x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0,0)y + \frac{\partial f}{\partial z}(0,0,0)z$$

$$= \frac{1}{R^3} + \frac{3}{R^4}(\cos \delta \cos \alpha x + \cos \delta \sin \alpha y + \sin \delta z)$$

$$dN=r \times dF$$

$$dN = r \times \frac{GMm_i}{|s|^3} s = GMm_i \left\{ \frac{1}{R^3} + \frac{3}{R^4} (\cos\delta\cos\alpha x + \cos\delta\sin\alpha y + \sin\delta z) \right\} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} R\cos\delta\cos\alpha - x \\ R\cos\delta\sin\alpha - y \\ R\sin\delta - z \end{pmatrix}$$

$$= GMm_i \left\{ \frac{1}{R^3} + \frac{3}{R^4} (\cos\delta\cos\alpha x + \cos\delta\sin\alpha y + \sin\delta z) \right\} R \begin{pmatrix} \sin\delta y - \cos\delta\sin\alpha z \\ \cos\delta\cos\alpha z - \sin\delta x \\ \cos\delta\sin\alpha x - \cos\delta\cos\alpha y \end{pmatrix}$$

dN の積分

$$N = GM \sum_{i=1}^n m_i \left\{ \frac{1}{R^2} + \frac{3}{R^3} (\cos\delta\cos\alpha x + \cos\delta\sin\alpha y + \sin\delta z) \right\} \begin{pmatrix} \sin\delta y - \cos\delta\sin\alpha z \\ \cos\delta\cos\alpha z - \sin\delta x \\ \cos\delta\sin\alpha x - \cos\delta\cos\alpha y \end{pmatrix}$$

地球楕円体の対称性と奇関数と偶力関数の定積分の性質から

$$N = \frac{3GM}{R^3} \sum_{i=0}^n m_i \begin{pmatrix} \cos\delta\sin\alpha\sin\delta(y^2 - z^2) \\ \cos\delta\cos\alpha\sin\delta(z^2 - x^2) \\ \cos^2\delta\sin\alpha\cos\alpha(x^2 - y^2) \end{pmatrix}$$

$$N_x = \frac{3GM}{R^3} \sum_{i=0}^n m_i \cos\delta\sin\alpha\sin\delta(y^2 - z^2) = \frac{3GM}{2R^3} \sin 2\delta\sin\alpha \sum_{i=0}^n m_i (y^2 - z^2)$$

上式の $\sum_{i=0}^n m_i (y^2 - z^2)$ の部分は、 $\sum_{i=0}^n m_i ((x^2 + y^2) - (x^2 + z^2))$ と書き換えることができる。

$\sum_{i=0}^n m_i (x^2 + y^2)$ は地球の z 軸を回転軸とする慣性モーメント $I_z=C$ 、

$\sum_{i=0}^n m_i (x^2 + z^2)$ は y 軸を回転軸とする慣性モーメント $I_y=A$ であることがわかる。

従って上式は $N_x = \frac{3GM}{2R^3} \sin 2\delta\sin\alpha (C - A)$ となる。

同様に N_y, N_z は

$$N_y = \frac{3GM}{R^3} \sum_{i=0}^n m_i \cos\delta\cos\alpha\sin\delta(z^2 - x^2) = \frac{3GM}{2R^3} \sin 2\delta\cos\alpha \sum_{i=0}^n m_i (z^2 - x^2)$$

上式の $\sum_{i=0}^n m_i (z^2 - x^2)$ の部分は、 $\sum_{i=0}^n m_i ((z^2 + y^2) - (x^2 + y^2))$ と書き換えることができる。

$\sum_{i=0}^n m_i (z^2 + y^2)$ は地球の x 軸を回転軸とする慣性モーメント $I_x= I_y=A$ であり、

上式は $N_y = -\frac{3GM}{2R^3} \sin 2\delta\cos\alpha (C - A)$ となる。

$$N_z = \frac{3GM}{R^3} \sum_{i=0}^n m_i \cos^2\delta\sin\alpha\cos\alpha(x^2 - y^2) = \frac{3GM}{2R^3} \cos^2\delta\sin 2\alpha \sum_{i=0}^n m_i (x^2 - y^2)$$

上式の $\sum_{i=0}^n m_i (x^2 - y^2)$ の部分は、 $\sum_{i=0}^n m_i ((x^2 + z^2) - (y^2 + z^2))$ と書き換えることができる。

従って上式は $N_z = \frac{3GM}{2R^3} \cos^2\delta\sin 2\alpha (A - A) = 0$ となる。

まとめると、下式となる。

$$N = \frac{3GM}{2R^3} (C - A) \sin 2\delta \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ -\cos\alpha \\ 0 \end{pmatrix} \quad (5) \text{式}$$

ここで(5)式の x 成分が $N_x = \frac{3GM}{2R^3}(C - A)\sin 2\delta \sin \alpha$ (6)式 が歳差のトルクをもたらす成分となる。以後、この式を基本式として展開してゆく。

尚、(5)式の y 成分 $N_y = -\frac{3GM}{2R^3}(C - A)\sin 2\delta \cos \alpha$ (7)式 は章動をもたらす成分である。

次に歳差運動 Ω の角速度は、前述のコマの(3)式からトルク N_x を $L \sin \varepsilon$ で除することにより求められる

$$\Omega = \frac{N_x}{L \sin \varepsilon} = \frac{3GM(C-A)}{2R^3 L \sin \varepsilon} \sin 2\delta \sin \alpha = \frac{3GM(C-A)}{2R^3 C \omega \sin \varepsilon} \sin 2\delta \sin \alpha \quad (8) \text{式}$$

ここで ε は地球の黄道傾斜角、L は地球の極軸まわり角運動量 $L=C\omega$ で、C は地球の極軸まわりの慣性モーメント、 ω は地球の自転の角速度である。

最終的に上式は $\Omega = \frac{3GM}{2R^3} \frac{H}{\omega \sin \varepsilon} \sin 2\delta \sin \alpha$ (9)式となる。

ここで $H = \frac{(C-A)}{C}$ は地球の力学的扁平率と呼ばれる地球物理学の重要な定数である。

3 太陽と月による歳差運動のトルク平均値

3.1 計算に使用する定数

はじめに太陽と月による歳差運動の計算に使用する定数をまとめておこう。

表 1 歳差運動の計算に使用する定数表

G 重力定数	$6.6743 \times 10^{-11} \text{ m}^3/\text{kg s}^2$
C 地球の慣性モーメント (極軸まわり)	$8.0359 \times 10^{37} \text{ kg m}^2$
A 地球の慣性モーメント (赤道軸まわり)	$8.0096 \times 10^{37} \text{ kg m}^2$
H 力学的扁平率 $H=(C-A)/C$	3.2728×10^{-3}
ω 地球の自転角速度	$7.2921 \times 10^{-5} \text{ rad/s}$
ε 地球の黄道傾斜角	23.44°
M_s 太陽の質量	$1.9884 \times 10^{30} \text{ kg}$
R_s 太陽と地球の距離	$1.496 \times 10^{11} \text{ m}$
M_m 月の質量	$7.3459 \times 10^{22} \text{ kg}$
R_m 月と地球の距離	$3.844 \times 10^8 \text{ m}$

3.2 太陽の歳差トルク N_x の計算法

トルクの一般式は前述の通り下式であらわされる。

$$N_x = \frac{3GM}{2R^3}(C - A)\sin 2\delta \sin \alpha \quad (6) \text{式}$$

上式は二つの変数 δ と α が含まれているが、軌道が黄道面にある場合には簡単な数式で表現することができる。図 5 は、軌道が黄道面にある時の天体の位置を赤道座標と黄道座標で示したものである。

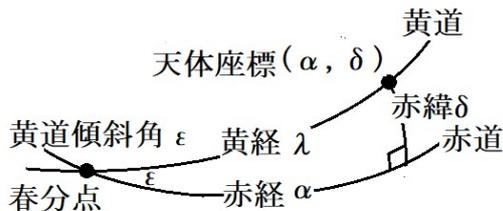


図 5 球面直角三角形で表された天体の位置

図において、天体の赤経 α 、赤緯 δ 、黄経 λ は球面直角三角形を構成している。これにその公式を適用して① $\sin \delta = \sin \lambda \sin \varepsilon$ ② $\cos \delta \sin \alpha = \sin \lambda \cos \varepsilon$ を導く。これにより (6) 式の N_x の $\sin 2\delta \sin \alpha$ の部分は

$$\sin 2\delta \sin \alpha = 2\sin \delta \cos \delta \sin \alpha = 2\sin \lambda \sin \varepsilon \sin \lambda \cos \varepsilon = \sin 2\varepsilon \sin^2 \lambda \text{ となるので}$$

$$N_x = \frac{3GM}{2R^3}(C - A)\sin 2\delta \sin \alpha = \frac{3GM}{2R^3}(C - A)\sin 2\varepsilon \sin^2 \lambda \quad (10) \text{式 となる。}$$

また黄経 λ を変数とした平均トルクは

$$\bar{N}_x = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} N_x d\lambda = \frac{3GM}{2R^3}(C - A)\sin 2\varepsilon \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2 \lambda d\lambda$$

上式の $\sin^2 \lambda$ の前の部分は定数と見なされるので、 $\sin^2 \lambda$ の λ が $0 \sim 2\pi$ の平均値は積分により求められ下記の通り π となるから

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 \lambda d\lambda = \left[\frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{4}\sin 2\lambda \right]_0^{2\pi} = \pi$$

$$N_x \text{ の平均値は } \bar{N}_x = \frac{3GM}{4R^3}(C - A)\sin 2\varepsilon \quad (11) \text{式となる。}$$

これまでの検討から、太陽の歳差トルク T_s は太陽の質量 M_s 、太陽と地球の距離 R_s を (10) 式に代入して下式で求められる。

$$T_s = \frac{3GM_s}{2R_s^3}(C - A)\sin 2\varepsilon \cdot \sin^2 \lambda \quad (12) \text{式}$$

図 6 は上式に表 1 の値を代入して求めたもので、黄経 λ を変数とした太陽の歳差トルクのグラフである。尚、黄経を月日に換算するには、黄経の 360° が 365.2422 日に相当するので、春分の日を第 1 日とする通日に、約 1 度/日を適用すればよい。

さらに図 6 の歳差トルクの平均値 \bar{T}_s は (11) 式より $\bar{T}_s = \frac{3GM_s}{4R_s^3}(C - A)\sin 2\varepsilon \quad (13) \text{式となる。}$

上式に表 1 の値を代入すると $\bar{T}_s = 5.707 \times 10^{21} \text{ Nm}$ となる。

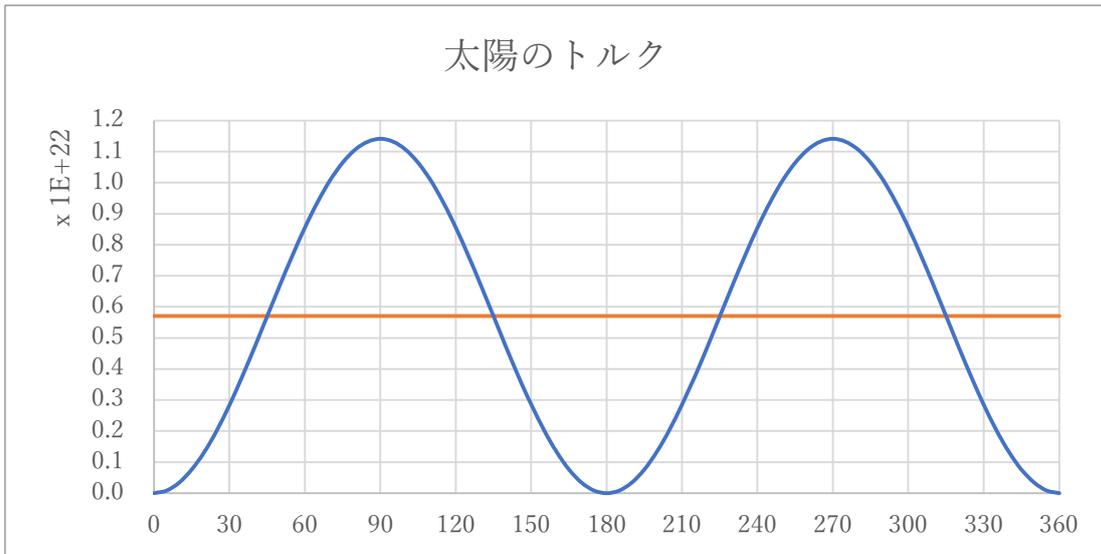


図6 黄経 λ を変数とした太陽の歳差トルク
 横軸 太陽の春分点からの黄経 度
 縦軸 太陽からの歳差トルク Nm (表示単位 10^{22} Nm)
 トルクの平均値 (直線) 5.707×10^{21} Nm

3.3 月の歳差トルク N_x の計算法

月の軌道は太陽と異なり極めて複雑である。
 月は黄道面に 5.1° の軌道傾斜角を持ちその昇交点は18.6年周期で回転しているが、軌道傾斜角が小さい場合の平均軌道は黄道面に存在すると見なされる。
 従って、月のトルクの算出は太陽と同じ要領で計算できる。(文献1,2)
 つまり月の歳差トルク T_m は月の質量 M_m 、月と地球の距離 R_m として(12)式と同様に下式でもとめられる。

$$T_m = \frac{3G}{2R_m^3} m (C - A) \sin 2\varepsilon \cdot \sin^2 \lambda \quad (14) \text{式}$$

図7は上式に表1の値を代入して求めたもので、黄経 λ を変数とした月の歳差トルクのグラフである。太陽に比べた月のトルクの大きさを実感してもらうため、トルクの日盛りを図6と同じにした。

尚、黄経の 360° は月が地球を1周する恒星月27.32日に相当する。

さらに図7の歳差トルクの平均値 \bar{T}_m は(13)式と同様に(9)式より

$$\bar{T}_m = \frac{3G}{4R_m^3} m (C - A) \sin 2\varepsilon \quad (15) \text{式となる。}$$

上式に表1の値を代入すると $\bar{T}_m = 1.243 \times 10^{22}$ Nm となる。

図7のトルクは月の昇交点の移動に伴うトルク変化を平均化したもので、黄道面の昇交点の位置によってトルクは異なる。その変化は $N_x = \frac{3GM}{2R^3} (C - A) \sin 2\delta \sin \alpha$ (6)式によって求められるが、月の赤経 α 、赤緯 δ の時間変化を代入するのは煩雑である。

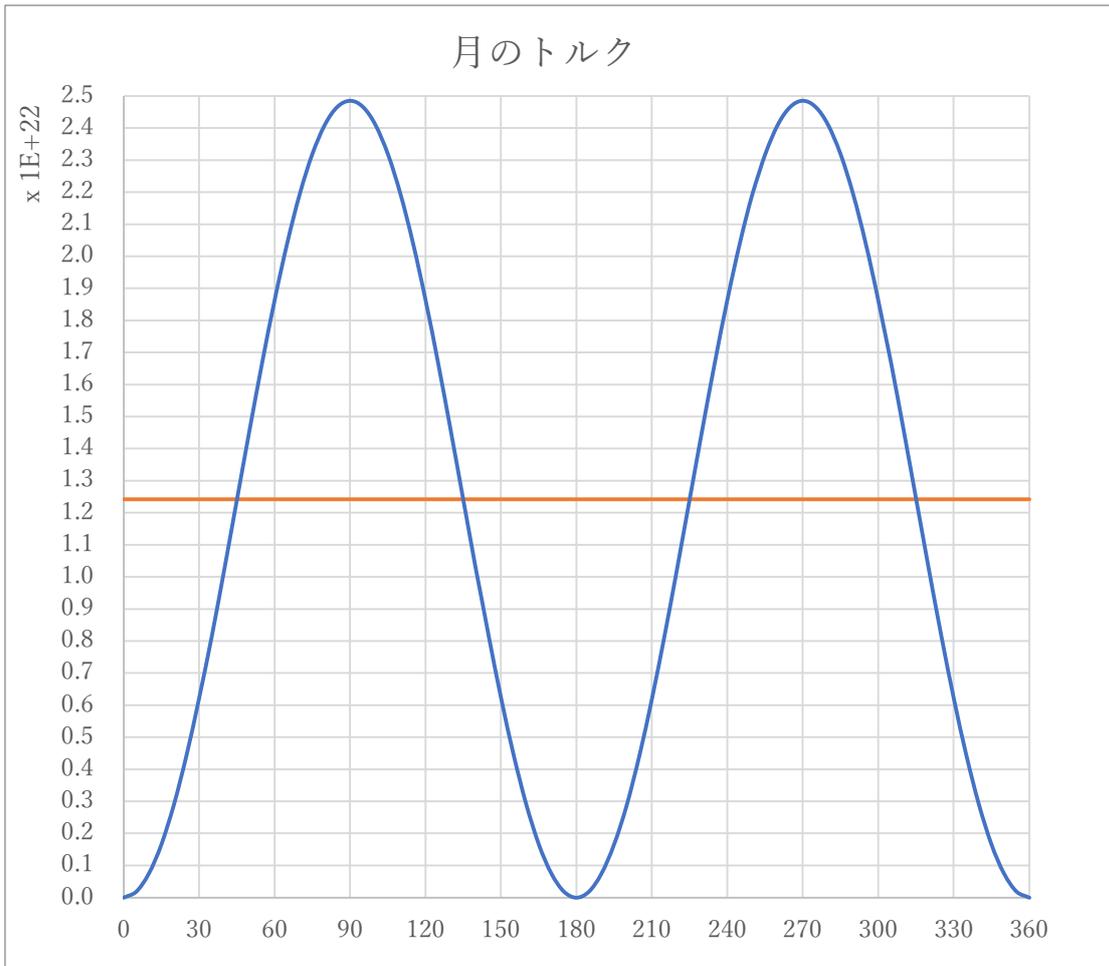


図7 黄経 λ を変数とした月の歳差トルク
 横軸 月の春分点からの黄経 度 (公転周期 27.32 日)
 縦軸 月からの歳差トルク Nm (表示単位 10^{22} Nm)
 トルクの平均値 (直線) 1.243×10^{22} Nm

4 太陽と月による歳差の合算

これまでの検討から、太陽と月の合算トルクの平均値は

$$\bar{T}_s + \bar{T}_m = 5.707 \times 10^{21} + 1.243 \times 10^{22} = 1.818 \times 10^{22} \text{ Nm} \text{ となる。}$$

(13)式と(14)式を合算して $L \sin \epsilon = C \omega \sin \epsilon$ で除すと日月歳差 $\bar{\Omega}_T$ は最終的に次のようになる。

$$\bar{\Omega}_T = \bar{\Omega}_s + \bar{\Omega}_m = \frac{3}{2} \left(\frac{GH}{\omega} \right) \cos \epsilon \left(\frac{M_s}{R_s^3} + \frac{M_m}{R_m^3} \right) \text{ rad/s} \quad (16) \text{ 式}$$

$\bar{\Omega}_T$ 日月歳差、 $\bar{\Omega}_s$ 太陽の歳差、 $\bar{\Omega}_m$ 月の歳差、G 重力定数、H 力学的扁平率、 ω 地球の自転角速度、 ϵ 地球の黄道傾斜角、 M_s 太陽の質量、 R_s 地球から太陽までの距離、 M_m 月の質量、 R_m 地球から月までの距離、

上記の計算結果 rad/s に $86400 \times 365.2422 \times (180/\pi) \times 3600 = 6.51 \times 10^{12}$ を掛けると " / 年に換算できる。

ここに歳差運動の角速度の内訳は

$$\bar{\Omega}_T = 15.937 \text{ (太陽)} + 34.704 \text{ (月)} = 50.641 \text{ (合計)} \text{ " / 年 となる。}$$

これは日月歳差の公表値 50.385" / 年に対して +0.5% の差である。

参考文献

- 1 『天体の位置と運動(シリーズ現代の天文学第13巻)』 p210~225
福島登志夫 日本評論社 2017
- 2 『地球の物理学事典』 p92~96, p450~451 朝倉書店 2013
- 3 『天界』 2022年3月号, 4月号 東亜天文学会
「これならわかる地球の歳差運動」 <コマのアナロジー> 江頭 務